



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, Caraș-Severin, 08.02.2025
Clasa a VII-a

- Timp de lucru 180 de minute
- Fiecare problemă se punctează cu 0-7 puncte

Problema 1. Pentru orice număr natural n se consideră expresiile $A(n) = 2n + 5$ și $B(n) = 8n + 1$.

- Arătați că există un singur număr natural n pentru care numărul $\frac{1 + B(n)}{A(n)}$ este natural.
- Determinați numerele naturale n pentru care numerele $\sqrt{A(n)}$ și $\sqrt{B(n)}$ sunt raționale.
(Supliment GM 9/2024)

Problema 2. Se consideră în jurul unui punct O unghiurile adiacente $\angle AOB, \angle BOC, \angle COD, \angle DOE$ și $\angle EOA$, cu măsurile direct proporționale cu cinci numere naturale consecutive ordonate crescător. Știind că unul dintre unghiuri are măsura de 60° , aflați măsurile celorlalte patru unghiuri.

(GM 1/2024)

Problema 3. Se consideră un patrulater convex $ABCD$ și se notează cu O punctul de intersecție al diagonalelor AC și BD . Dacă P este mijlocul laturii AB , iar R este mijlocul laturii AD , demonstrați că O este centrul de greutate al triunghiului CRP dacă și numai dacă $ABCD$ este paralelogram.

(S.G.M. 9/2024)

Problema 4. Spunem că un triplet (a, b, c) de numere naturale nenule, cu $a < b < c$, este *interesant* dacă $ac = b^2$. Arătați că:

- (a, b, c) este un triplet *interesant* dacă și numai dacă $\frac{(a+b)^2}{(b+c)^2} = \frac{a}{c}$;
- Dacă numărul $\frac{a\sqrt{2}+b}{b\sqrt{2}+c}$ este rațional, atunci (a, b, c) este un triplet *interesant*.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, Caraș-Severin, 08.02.2025
BAREME Clasa a VII-a.

(Orice soluție corectă se punctează la maxim)

Problema 1.

$$\text{a) } \frac{1 + B(n)}{A(n)} = \frac{8n + 2}{2n + 5} \in \mathbb{N} \Rightarrow (2n + 5) \mid 4(2n + 5) - (8n + 2), \text{ deci } (2n + 5) \mid 18 \quad (3p)$$

$$\text{Cum } 2n + 5 \text{ este impar obținem } 2n + 5 = 9, \text{ deci } n = 2 \quad (1p)$$

$$\text{b) Din } 2n + 5 = x^2, 8n + 1 = y^2, \text{ cu } x, y \in \mathbb{Z}, \text{ se ajunge la } 4x^2 - y^2 = (2x - y)(2x + y) = 19, \\ \text{de unde } x = 5, y = 9 \text{ sau } x = 5, y = -9. \text{ În final } n = 10 \quad (3p)$$

Problema 2. Notăm cu $a < b < c < d < e$ măsurile celor 5 unghiuri și astfel avem $\frac{a}{n} =$

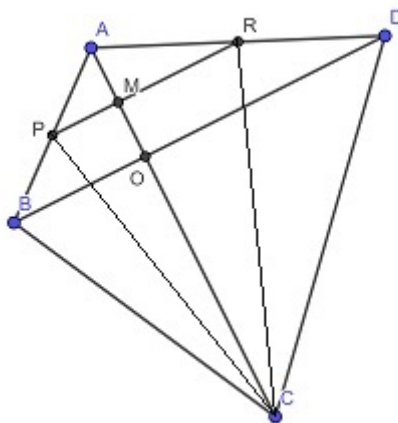
$$\frac{b}{n+1} = \frac{c}{n+2} = \frac{d}{n+3} = \frac{e}{n+4} = \frac{360^\circ}{5n+10} = \frac{72^\circ}{n+2} \quad (2p)$$

$$\text{Din } \frac{c}{n+2} = \frac{72^\circ}{n+2} \text{ rezultă } c = 72^\circ = \angle COD \quad (1p)$$

Unghiurile cu măsura de 60° nu pot fi decât $a = \angle AOB$ sau $b = \angle BOC$. În primul caz rezultă $\frac{60^\circ}{n} = \frac{72^\circ}{n+2}$, de unde $n = 10$ și astfel măsurile cerute sunt $60^\circ, 66^\circ, 72^\circ, 78^\circ$ și 84° (2p)

În al doilea caz: $n = 4$ și măsurile $48^\circ, 60^\circ, 72^\circ, 84^\circ$ și 96° (2p)

Problema 3.



Dacă O este centrul de greutate pentru $\triangle CRP$, atunci (considerând mijlocul M al lui PR) avem: $2 \cdot OM = OC$ și $AM = MO$ (RP fiind linie mijlocie în $\triangle ABD$) (2p)

Deducem că O este mijlocul lui AC , deci $AO = OC$ (1)

$$\text{Din } PM = \frac{BO}{2} = RM = \frac{DO}{2}, \text{ iar } CM \text{ mediană, avem } PM = RM, \text{ deci } BO = DO \quad (2)$$

Din (1) și (2); $ABCD$ este paralelogram (2p)

Reciproc: Dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci $AO = CO$; PR linie mijlocie în $\triangle ABD$ conduce la $AM = MO = \frac{1}{2}AO$ și astfel $MO = \frac{1}{2}CO$, deci O este centrul de greutate al $\triangle CPR$ (3p)

Problema 4.

(a) Orice calcule corecte echivalente (sau nu neapărat) (4p)

(b) Din $\frac{a\sqrt{2}+b}{b\sqrt{2}+c} = r \in \mathbb{Q}$ deducem: $\sqrt{2}(a-br) + (b-cr) = 0$, (1p)

Dacă $a-br \neq 0$, atunci se obține $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, fals. Așadar $a-br = 0$ și $b-cr = 0$, de unde:

$$ac = b^2. \quad (2p).$$